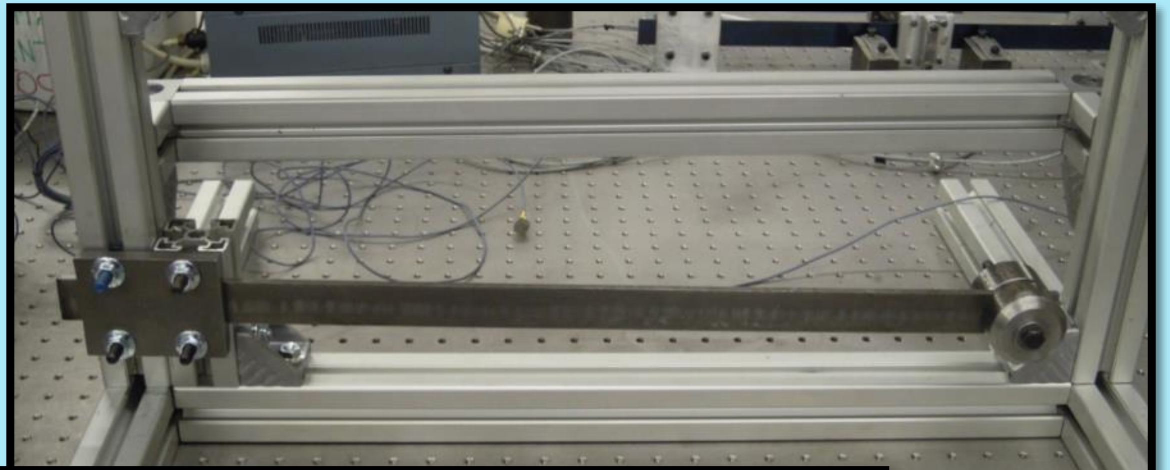
POLITECNICO DI TORINO: BANCO PROVA DeXpl.LAB

Manuale di Utilizzo DeXpl.LAB: Risposta Libera

Sommario

1. Oggetto:

Studio di un sistema vibrante ad un grado di libertà attraverso misure accelerometriche sperimentali

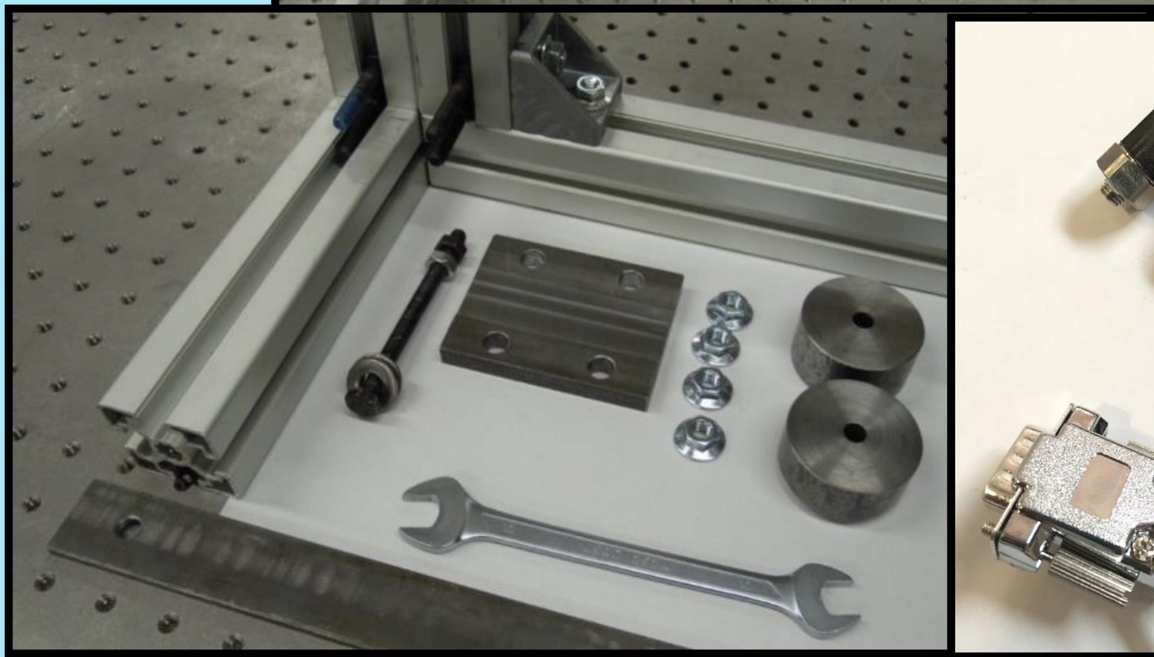


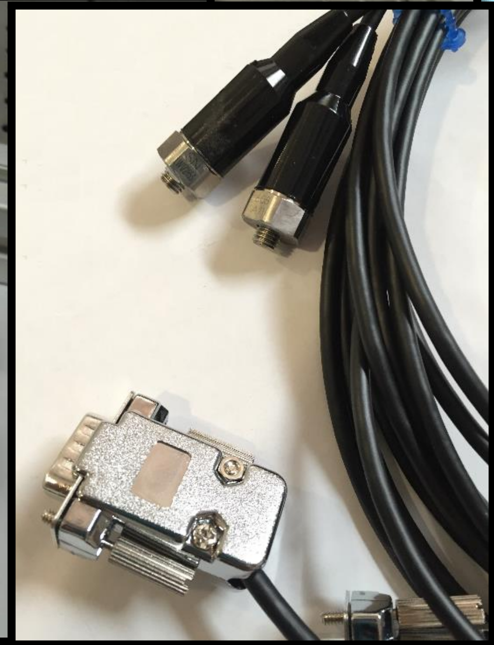
2. Scopo:

Stima della frequenza naturale del sistema (ω_n) e del fattore di smorzamento (ζ) al variare di parametri caratteristici (lunghezza della trave e massa concentrata)

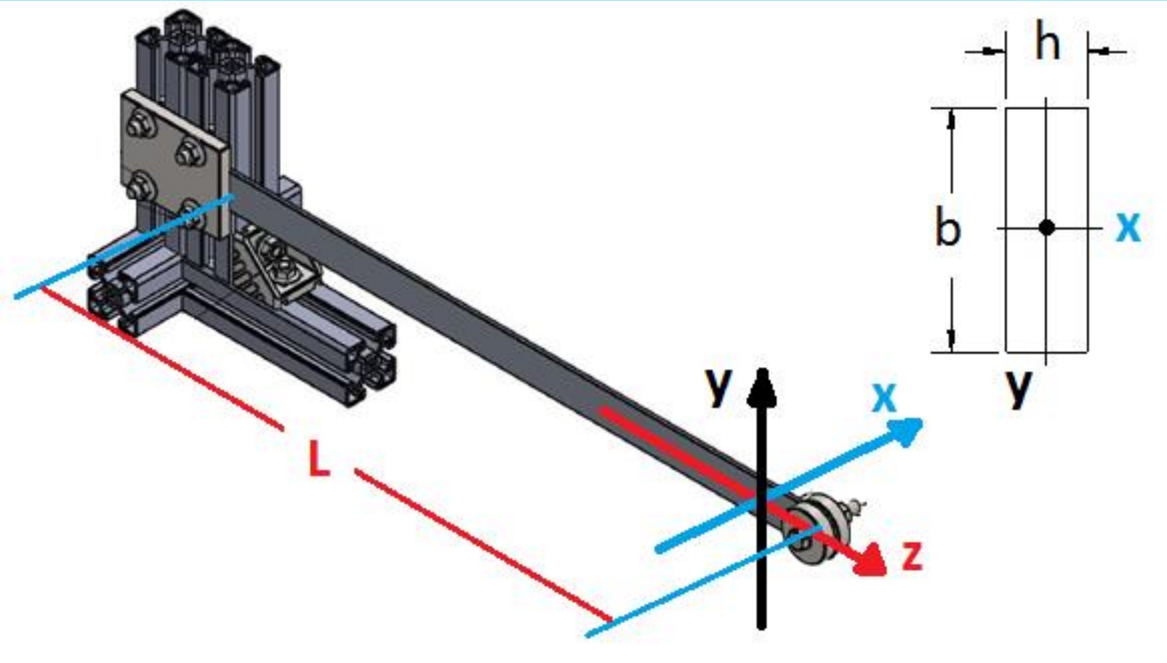
3. Apparecchiatura:

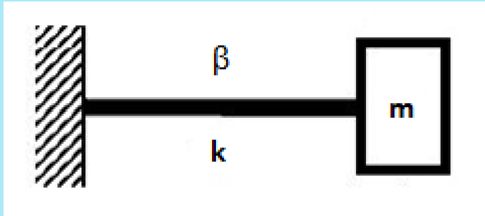
- Travi in acciaio e alluminio
- Piastra con scanalatura
- 4 dadi per viti M8
- Chiave a forchetta da 13 mm
- Masse campione (M_{Al}=0.1kg M_{Fe}=0.23kg)
- 1 lunga vite, 2 dadi e 2 rondelle per il fissaggio delle masse campione
- 2 accelerometri monoassiali





4. Modello e stima dei parametri



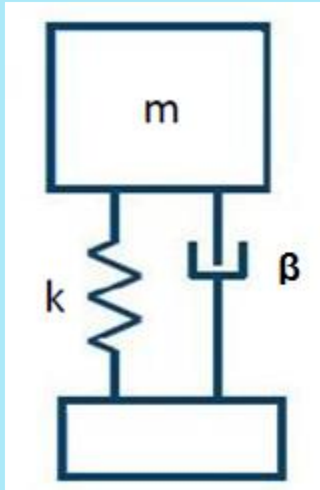


$$I = I_y = \frac{b\,h^3}{12}$$

$$k = \frac{3\,E\,I}{L^3}$$

E_{Fe}=210000 MPa

E_{Al}=64000 MPa



m: corrisponde esattamente alla massa campione utilizzata

β: coefficiente di smorzamento (incognito) dello smorzatore viscoso

k: rigidezza flessionale della trave

$$m\,\ddot{x} + \beta\dot{x} + k\,x = 0$$

4.1. *Analisi della risposta libera*

RISPOSTA LIBERA:

$$m\,\ddot{x} + \beta\,\dot{x} + k\,x = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{\beta}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}\,x = 0$$

Frequenza naturale e fattore di smorzamento:

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m}$$

$$\zeta = \frac{\beta}{\beta_{cr}} = \frac{\beta}{2\sqrt{km}} = \frac{\beta}{2m\omega_n}$$

$$\ddot{x} + 2\,\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2\,x = 0$$

$$\lambda = Re + i\,Im = -\sigma + i\omega$$

Eulero: $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\,\sin\alpha$

$$x(t) = x_0 e^{\lambda t}\,;\dot{x}(t) = \lambda\,x_0 e^{\lambda t}\quad;\ddot{x}(t) = \lambda^2 x_0 e^{\lambda t}$$

$$(\,m\,\lambda^2 + \beta\,\lambda + k\,)\,x_0\,e^{\lambda t} = 0$$

$$\lambda = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4mk}}{2m}$$

$$\Delta = \sqrt{\beta^2 - 4mk}$$

$$\begin{cases} \beta = 0 & \zeta = 0 & \Delta < 0 & \lambda\ immaginari & \rightarrow & non\ smorzato \\ \beta < 2\sqrt{mk} = \beta_{cr} & \zeta < 1 & \Delta < 0 & \lambda\ complessi\ coniugati & \rightarrow & sottosmorzato \\ \beta = 2\sqrt{mk} = \beta_{cr} & \zeta = 1 & \Delta = 0 & \lambda\ reali\ coincidenti & \rightarrow & smorzamento\ critico \\ \beta > 2\sqrt{mk} = \beta_{cr} & \zeta > 1 & \Delta > 0 & \lambda\ reali & \rightarrow & sovrasmorzato \end{cases}$$

$\lambda\ immaginari$: $\lambda = \pm\,i\omega$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_n$$

$$x(t) = x_1 e^{i\omega_n t} + x_2 e^{-i\omega_n t} =$$

$$= c_1\cos\omega_n t + c_2\sin\omega_n t$$

$\lambda\ complessi\ coniugati$: $\lambda = -\sigma \pm i\omega$

$$\omega = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = \omega_d$$

$$\sigma = \frac{\beta}{2m} = \zeta\omega_n$$

$$x(t) = x_1 e^{(-\sigma + i\omega_d)t} + x_2 e^{(-\sigma - i\omega_d)t} =$$

$$= c_1 e^{-\sigma t}\cos(\omega_d t) + c_2 e^{-\sigma t}\sin(\omega_d t)$$

$\lambda\ reali$: $\lambda_1 = -\sigma_1\,;\ \lambda_2 = -\sigma_2;$

$$\sigma = -\frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4mk}}{2m}$$

$$x(t) = x_1 e^{-\sigma_1 t} + x_2 e^{-\sigma_2 t}$$

Se: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \rightarrow \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma = {}^{\beta}/_{2m} = \zeta\omega_n$

$$x(t) = x_1 e^{-\sigma t} + t\,x_2 e^{-\sigma t}$$

Nel caso specifico, trattandosi di una struttura metallica senza aggiunta di dispositivi smorzanti, il sistema risulta **sottosmorzato**.

Lo spostamento dell'estremità libera$x(t)$ sarà quindi:

$$x(t) = (c_1 \cos(\omega_d t) + c_2 \sin(\omega_d t))e^{-\zeta\omega_n t}$$

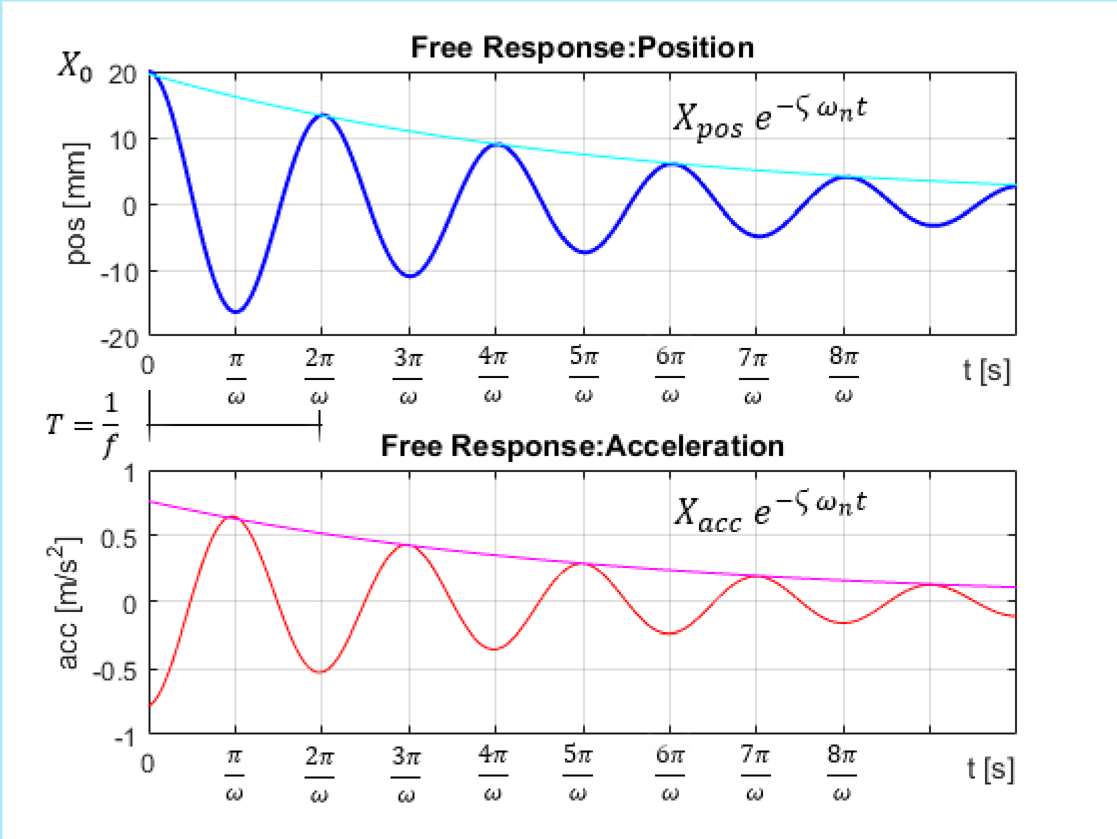
Dove:

ω_d corrisponde alla frequenza di oscillazione del Sistema (frequenza smorzata).

Derivando lo spostamento $x(t)$ è semplice ottenere le espresisoni di velocità $\dot{x}(t)$ed accelerazione $\ddot{x}(t)$.

NOTA BENE:

La prova in questione consiste nella misura dell'accelerazione $\ddot{x}(t)$, che risulta avere la stessa frequenza di oscillazione ω_d e il medesimo fattore di decremento $\zeta\omega_n$dello spostamento $x(t)$. Le stesse analisi proposte al paragrafo 6 saranno perciò applicabili ad ambedue i segnali.



4.2. Esempio di calcolo della rigidezza k e stima della costante di smorzamento β:

Noti:

Geometria:	Materiale:
b= 30 mm ; h= 3 mm ; L= 600mm.	Trave in Acciaio → ***E= 210 GPa .***
N.B. Attenzione alla definizione di ***b*** ed ***h*** !	Massa campione: ***M= 0,4 kg.***

$$I = I_y = \frac{bh^3}{12} = \frac{30\ mm\ 3^3 mm^3}{12} = 67{,}5\ mm^4$$

$$E = 210\ 10^9 Pa = 210\ 10^3\ {}^{N}\!/_{mm^2}$$

$$k = \frac{3\ EI}{L^3} = \frac{3\ \ 210\ 10^3\ {}^{N}\!/_{mm^2}\ 67{,}5\ mm^4}{600\ ^3 mm^3} = 0{,}1969\ {}^{N}\!/_{mm} = 196{,}9\ {}^{N}\!/_{m}$$

Per esempio con $\zeta = 0{,}01$

$$\beta_{cr} = 2\sqrt{km} = 2\sqrt{196{,}9\ {}^{N}\!/_{m}\ 0{,}4\ kg} = 17{,}75\ {}^{Ns}\!/_{m}$$

$$\beta = \beta_{cr}\ \zeta = 0{,}01\ 17{,}75\ {}^{Ns}\!/_{m} = 0{,}1775\ {}^{Ns}\!/_{m}$$

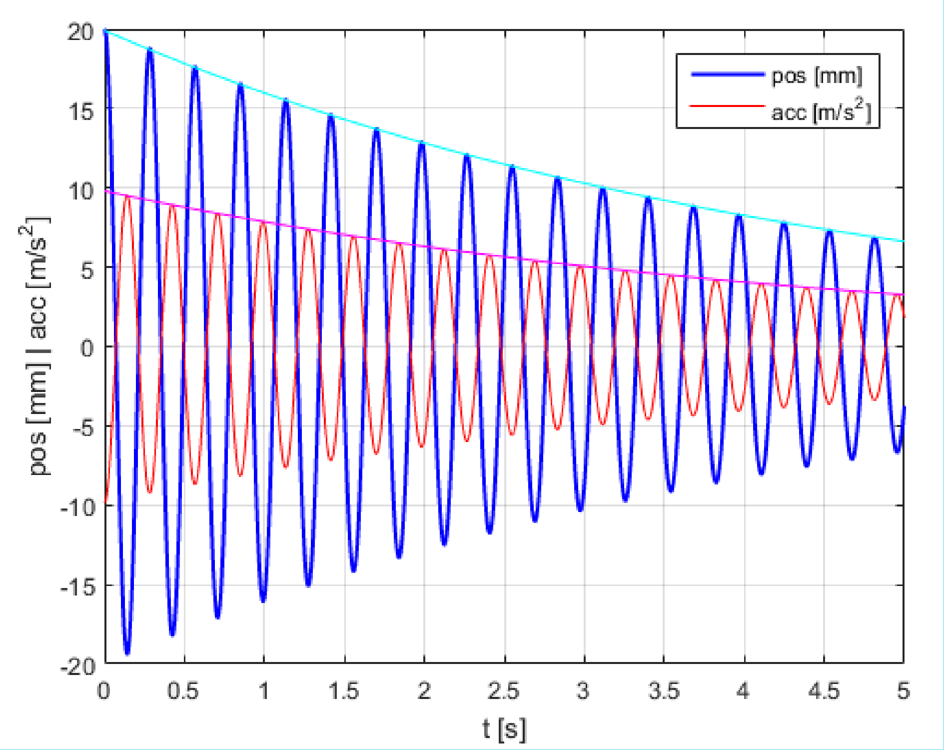
In ambiente Matlab:

```
I=30*3^3/12                    k=3*210e3*I/600^3
betacr=2*(196.9 *0.4)^0.5      beta=0.01*betacr
```

4.3. Esempio di risposta libera sottosmorzata

Parametri: M=0,4 kg L=600 mm I=67,5 mm^4 Mat: Acciaio → E= 210e3 N/mm^2

Condizioni iniziali: X0= 20 mm V0= 0 m/s



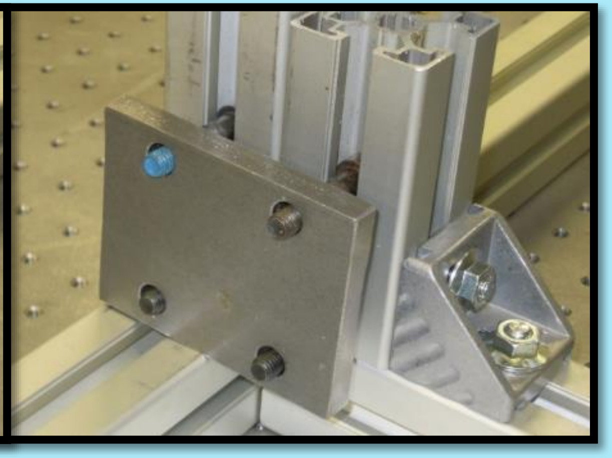
I grafici sono stati generati con il programma Matlab

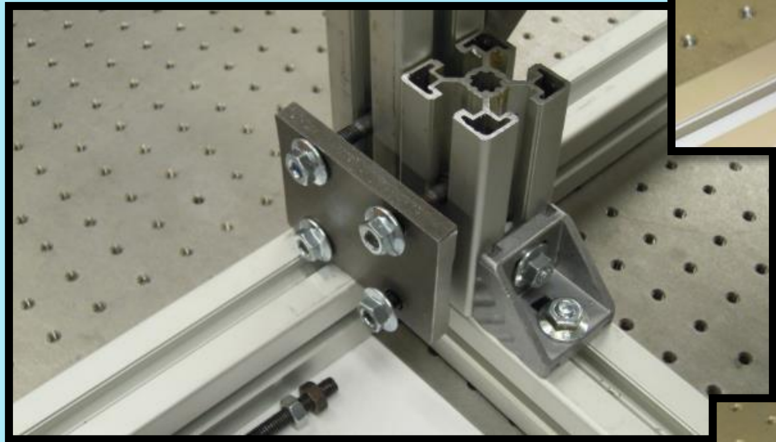
Freeresponse.m

Dall'immagine si può facilmente notare come accelerazione e velocità abbiano uguale frequenza di oscillazione ω_d e decremento; le due curve sono però evidentemente sfasate di 180° e presentano ampiezze differenti.

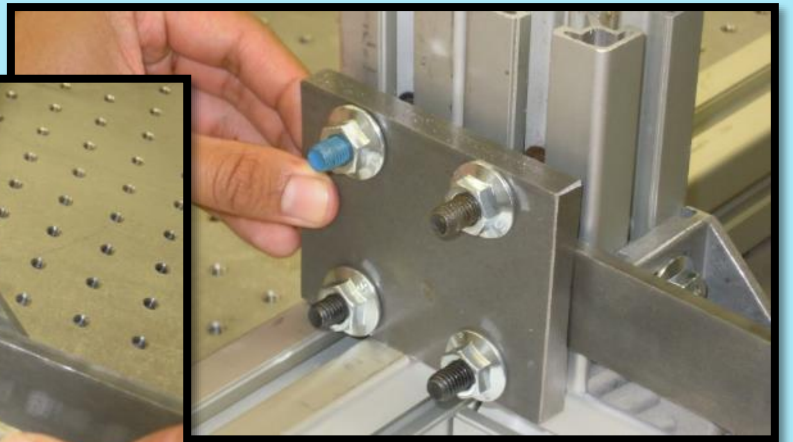
5. Procedimento

1) Posizionare la piastra infilando le viti sporgenti dalla struttura nei fori passanti; si ricorda di rivolgere la scanalatura verso i montanti.





2) Avvitare i dadi sulle viti per fissare la piastra; NON SERRARE completamente, lasciare uno spazio sufficiente da consentire il passaggio della trave.

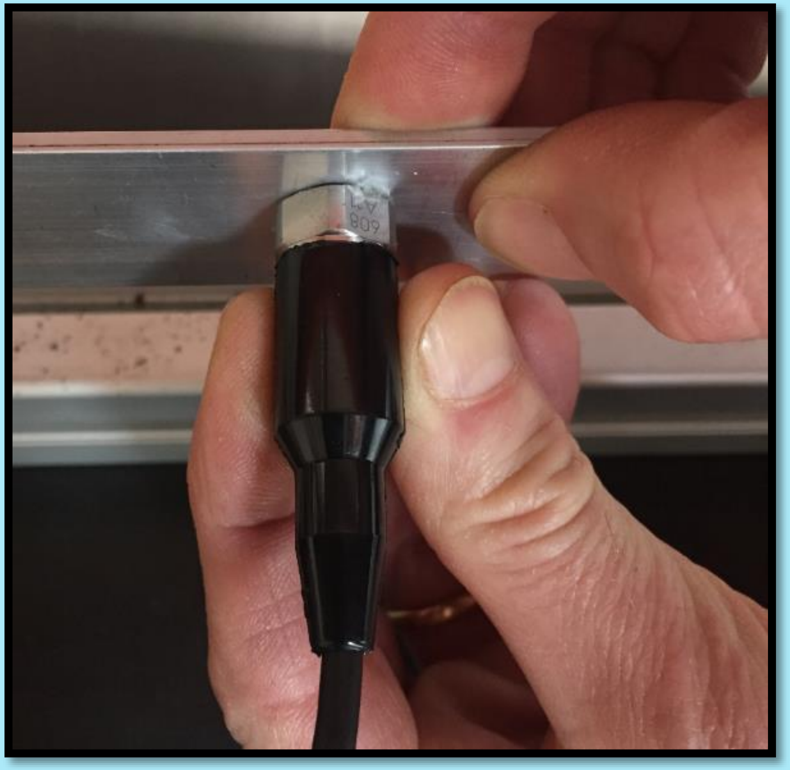


3) Inserire la trave nella scanalatura a contatto con i montanti.

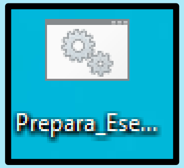
4) Serrare i dadi utilizzando la chiave a forchetta controllando che la trave sia orizzontale.

5) Assemblare e montare la massa campione.

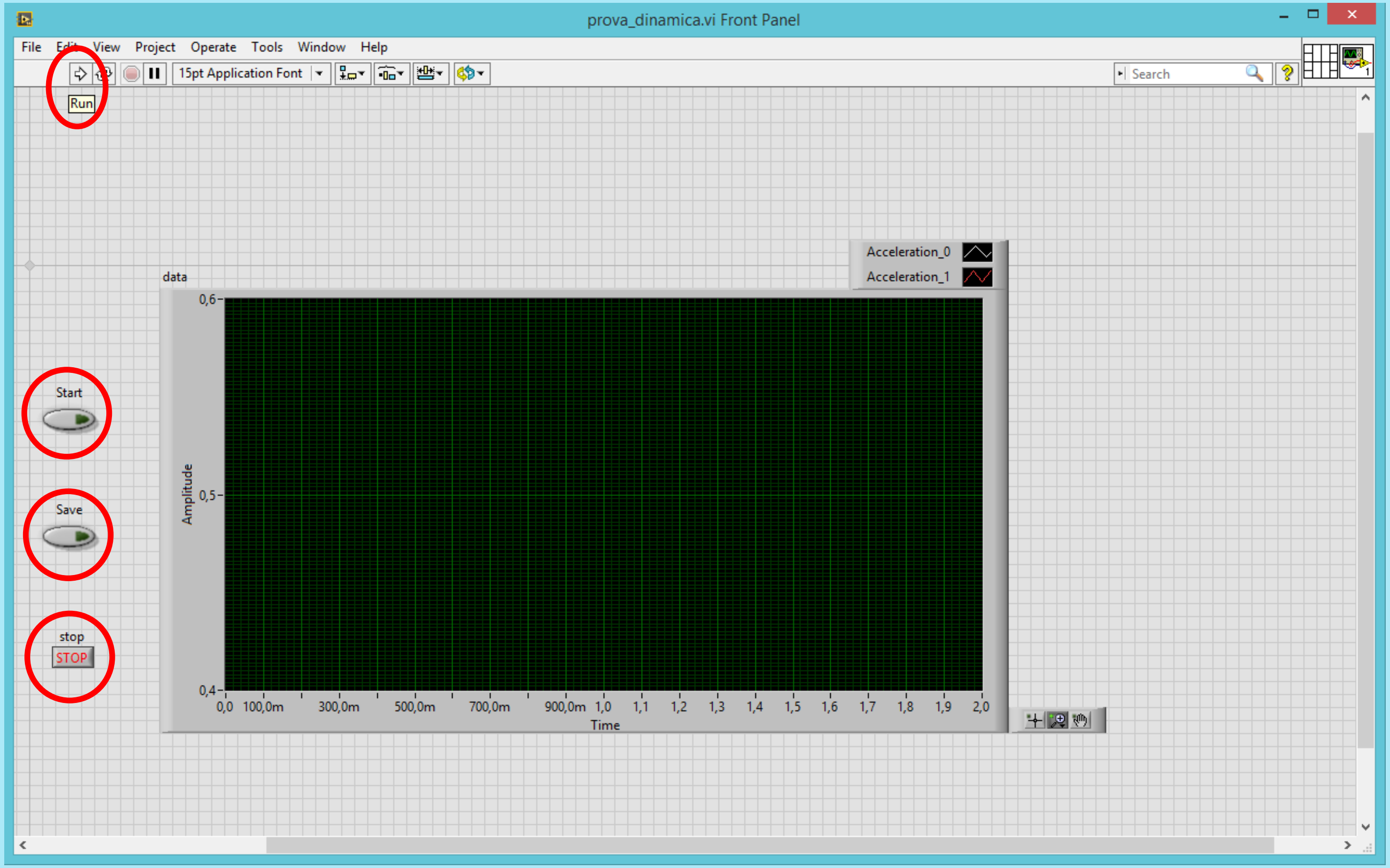
6) Attaccare gli accelerometri alla trave utilizzando l'apposita cera come mostrato in figura.

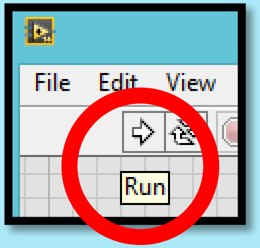


7) Connettere gli accelerometri alla scheda di acquisizione.



8) Fare doppio click sull'icona ***Prepara_Esercitazione_Meccanica_Vibrazioni***, sul desktop, per generare la cartella di lavoro (*Meccanica_delle_vibrazioni*) contenente il file matlab *analisiacc.m*.
9) Avviare l'interfaccia di acquisizione via LabVIEW: ***Misura vibrazioni libere.vi***, situato sul desktop (o ***prova_dinamica.vi***, nella cartella C:*temp*)

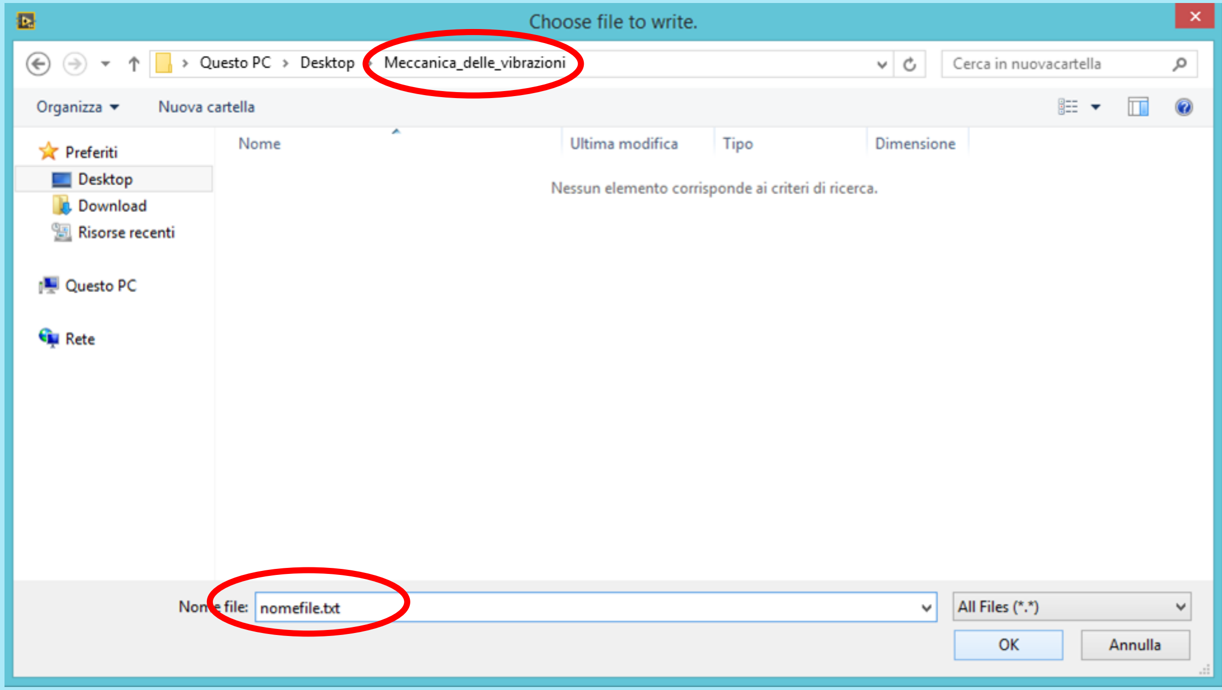




- Per avviare il programma di acquisizione premere ***RUN*** →

- Per avviare l'acquisizione premere **Start**; il secondo operatore dovrà quindi spostare di pochi centimetri la massa (indicativamente 2 cm) per eccitare il sistema originando l'oscillazione. È buona norma lasciar passare qualche istante tra la pressione del tasto Start e l'eccitazione del sistema; premere il tasto una sola volta ed attendere 20 s per la visualizzazione

- Per salvare l'acquisizione premere **Save**: occorrerà scegliere la cartella di destinazione precedentemente generata sul desktop (***Meccanica_delle_vibrazioni***) e nominare il file secondo il formato ***nomefile.txt***
NB. Il file "Prepara Prova" sul desktop genera in automatico la nuova cartella di lavoro, si veda il punto 8.



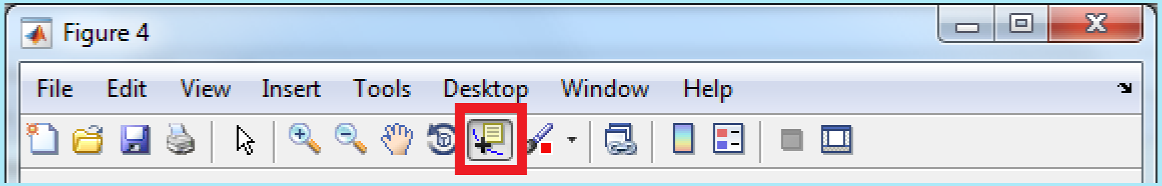
- Per terminare il programma premere **Stop** e chiudere la finestra di LabVIEW.

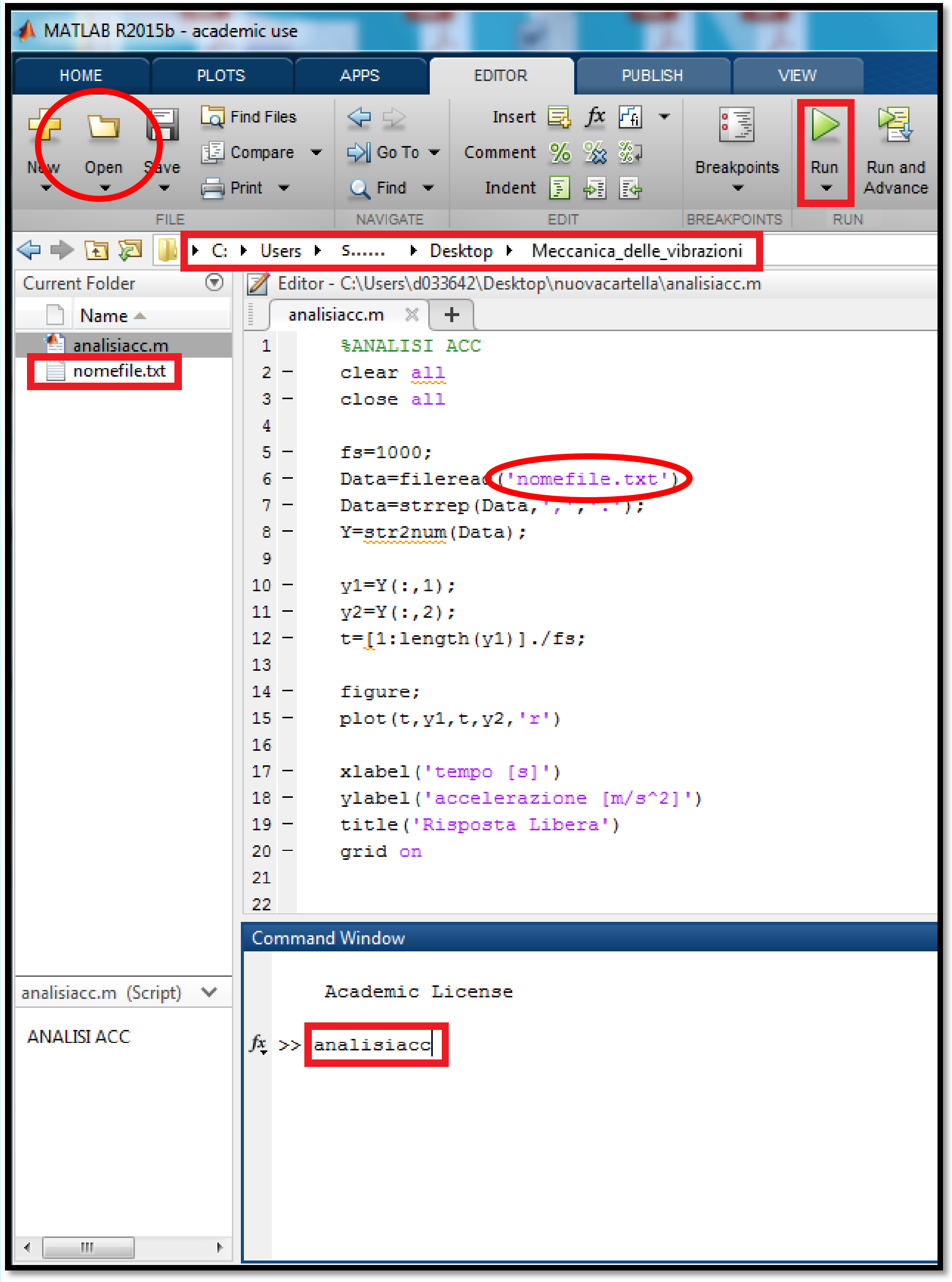
POLITECNICO DI TORINO: BANCO PROVA DeXpl.LAB

6. *Analisi*

Utilizzando il software per il calcolo numerico MATLAB, sarà possibile rappresentare graficamente i dati salvati, ed effettuare ulteriori analisi.

1. Avviare Matlab
2. Aprire il file ***analisiacc.m*** contenuto nella cartella di lavoro (***Meccanica_delle_vibrazioni***)
3. Verificare la correttezza del percorso della cartella di lavoro e la presenza dei file acquisiti in precedenza (***nomefile.txt***).
4. Correggere il nome del file in cui sono stati salvati i segnali acquisiti (***nomefile.txt***)
5. Eseguire ***analisiacc.m*** digitandone il nome in Command Window o premendo RUN
6. Per visualizzare i valori di accelerazione sul grafico, utilizzare il comando *Data Cursor* evidenziato in figura e selezionare un punto sul grafico; le coordinate x e y appariranno in un riquadro (*datatip*).





6.1. *Analisiacc.m*

Di seguito è riportato il programma Matlab per rappresentare graficamente le accelerazioni acquisite.

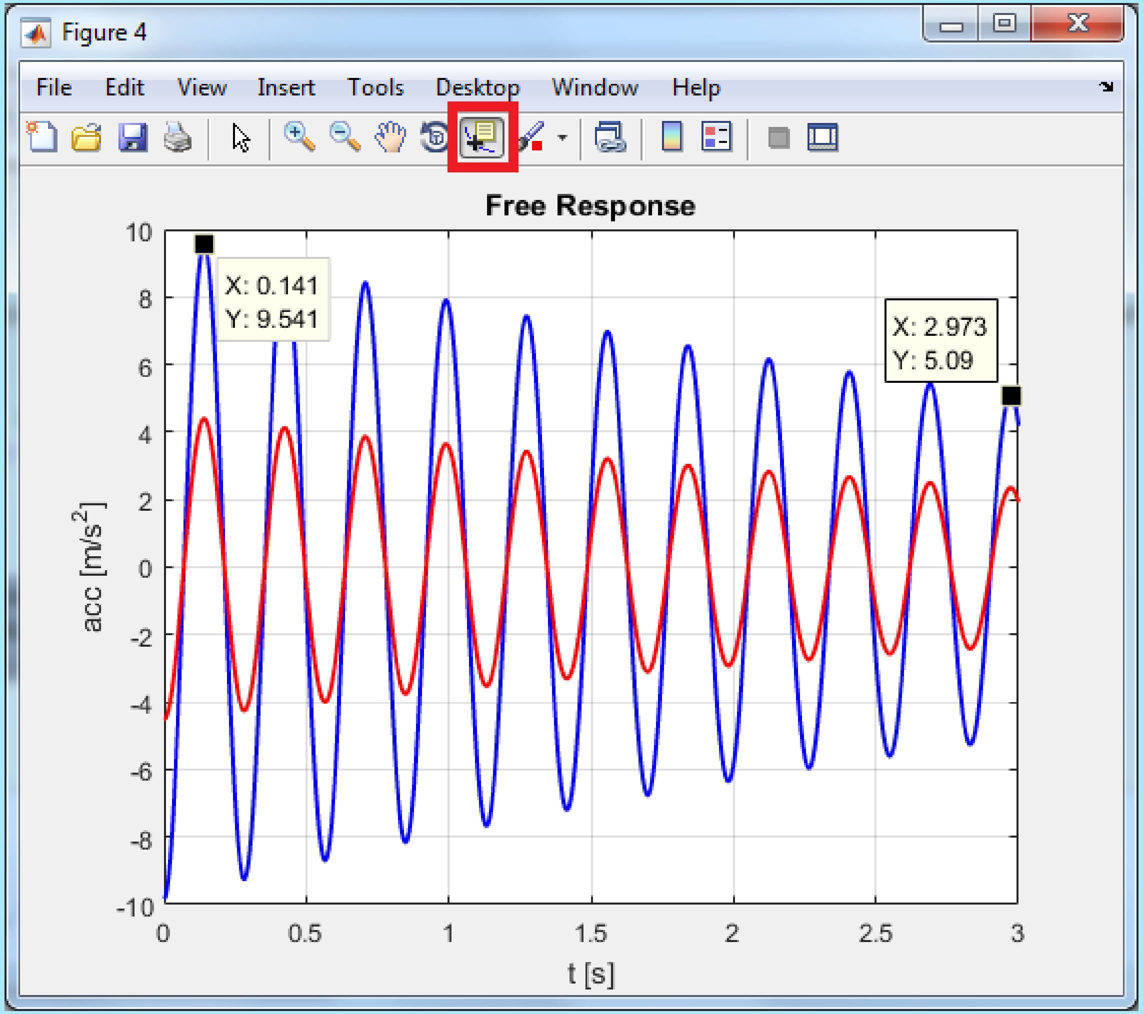
```
%ANALISI ACC

    Clear all    % cancella tutte le variabili del Workspace
    Close all    % chiude tutti i grafici precedentemente creati
    fs=2048;     % frequenza di campionamento: numero di misure acquisite in un secondo
    Data=fileread('nomefile.txt');  % carica il file txt nella variabile Data come stringa
    Data=strrep(Data,',','.');      % sostituisce il separatore decimale virgola con il punto
    Y=str2num(Data);    % converte la stringa in numeri: un matrice composta da 2 colonne
                        % nelle quali compaiono i valori di accelerazione nel tempo
    y1=Y(:,1)-mean(Y(:,1)); % tutti i valori (:) della prima colonna (acc1) sono copiati nella
                            % variabile y1 (vettore colonna)
    y2=Y(:,2)-mean(Y(:,2)); % tutti i valori della seconda colonna (acc2) sono copiati nel vettore y2
    t=[1:length(y1)]/fs;    % genera l'asse tempi nota la frequenza di campionamento:
                      % il vettore di numeri in successione da 1 alla dimensione del vettore y1
                      % viene moltiplicato per il dt tra un'acquisizione e la successiva: dt=1/fs
    figure;           % crea una nuova figura vuota
    plot(t,y1,t,y2,'r')     % rappresenta graficamente i valori delle accelerazioni:
                            % "r" modifica il colore della seconda curva(rosso)
    xlabel('tempo [s]')             % etichetta asse x
    ylabel('accelerazione [m/s^2]') % etichetta asse y
    title('Risposta Libera')        % titolo
    legend('acc1','acc2')           % legenda
    grid on                         % crea una griglia tratteggiata
```

6.2. Confronto visivo tra i due segnali accelerometrici e visualizzazione valori da grafico

Si procede ad un confronto grafico degli andamenti dell'accelerazione nei 2 punti di misura, evidenziati rispettivamente in blu ed in rosso.

Si denota che gli andamenti delle accelerazioni nei due punti sono perfettamente in fase e condividono lo stesso periodo; solo l'ampiezza è differente poiché cambia il punto di osservazione del fenomeno.



Per visualizzare i valori di accelerazione sul grafico, utilizzare il comando *Data Cursor* evidenziato in figura.

Sarà necessario leggere i valori per almeno 2 picchi distanti ***n*** periodi (e.g. 10); si avranno perciò t_1, a_1, t_n, a_n.

Quando lo smorzamento è piccolo infatti, la differenza tra due picchi successivi (n=1) potrebbe essere molto ridotta, ed i calcoli proposti in seguito risulterebbero affetti da un errore considerevole; è quindi consigliabile utilizzare un ***n*** sufficientemente grande affinché la differenza tra a_1 ed a_n sia apprezzabile.

Lo stesso vale per la stima di ω_d attraverso t_1 e t_n.

6.1. Stima del fattore di smorzamento ζ

Per i sistemi sottosmorzati, attraverso il calcolo del decremento logaritmico δ (rapporto tra il logaritmo di 2 picchi), è possibile stimare il fattore di smorzamento ζ.

$$a_1 = X_{acc} e^{-\zeta\omega_n t}$$

$$a_n = X_{acc} e^{-\zeta\omega_n (t+nT)}$$

$$\frac{a_1}{a_n} = \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{e^{-\zeta\omega_n (t+nT)}} = e^{\zeta\omega_n nT}$$

Il decremento logaritmico δ risulta perciò:

$$\delta = \ln\frac{a_1}{a_n} = \zeta\omega_n nT$$

Ricordando che $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega_d}$ e $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ si ottiene:

$$\delta = 2\pi n \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi n)^2 + \delta^2}}$$

Nell'esempio, per ***n=10*** (il secondo picco dista10 periodi dal primo):

$$\delta = \ln\frac{a_1}{a_n} = \ln\frac{9{,}54}{5{,}09} = 0{,}628$$

In ambiente Matlab:

```
delta=log(9.541/5.09)

n=10
```

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi n)^2 + \delta^2}} = \frac{0{,}628}{\sqrt{(20\pi)^2 + 0{,}628^2}} = 0{,}01$$

In ambienteMatlab:

```
zeta=delta/(((2*10*pi)^2+delta^2)^0.5)
```

NB. `zeta=…` genera una variabile contenente il risultato dell'operazione; questa potrà essere richiamata in seguito; in alternativa è possibile utilizzare la variabile `ans` che richiama l'ultimo valore calcolato, oppure utilizzare il suo valore numerico approssimato e.g. $0{,}628$ (questo causerà però una maggior propagazione dell'errore).

6.2. Stima della frequenza naturale del sistema ω_n

La frequenza naturale verrà calcolata mediante la stima del periodo smorzato $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega_d}$:

$$\omega_d = \frac{2\pi}{T}$$

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{2\pi}{T\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Nell'esempio, per ***n=10***

$$T = \frac{t_n - t_1}{n} = \frac{2{,}973 - 0{,}141}{10} = 0{,}2832\ s$$

NOTA: con n=10, T è il valore medio su 10 periodi; ciò aumenta l'accuratezza della stima.

$$\omega_d = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}2832} = 22{,}1864\ {}^{rad}/_{s}$$

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{22{,}186}{\sqrt{1-0{,}01^2}} = 22{,}1875\ {}^{rad}/_{s}$$

In ambiante Matlab:

```
T= (2.973-0.141)/n

Wd=2*pi/T

Wn=Wd/(1-zeta^2)^0.5
```